一般化 Iwakiri-Satoh 2-knot のカンドルコサイクル不変量

京都大学　数理解析研究所
植田雄大 (Yudai UEDA) *

概要

n 成分の絡み目 L と n 個の結び目 $K_i(i=1,2,...,n)$ に対して 2 次元結び目を次のように定める．$\mathbb{R}^3$ に標準的に埋め込まれた S^2 上の L の図式それぞれの成分に対し, i 番目の成分の管状近傍を (K_i のタングル図式) $\times S^1$ に置き換える．このようにして表される図式を持つ 2 次元結び目を一般化 Iwakiri-Satoh 2-knot という．一般化 Iwakiri-Satoh 2-knot は deform-spun knot であり, twist-roll-spun knot は一般化 Iwakiri-Satoh 2-knot である．本講演では一般化 Iwakiri-Satoh 2-knot の四面体カンドルに対するカンドルコサイクル不変量を L および $K_i(i=1,2,...,n)$ の不変量で表せることを紹介する．

1　導入

球面 S^2 の 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ への滑らかな埋め込みの像を 2 次元結び目 (2-knot) と呼ぶ．2 次元結び目に対して, 1 次元結び目 (1-knot) と同様に, 結び目の補空間の基本群から有限群への準同型写像の個数が不変量として古典的に用いられてきた．その後, 1980 年代にカンドルが導入されて, 結び目の基本カンドルから有限カンドルへ準同型写像の個数であるカンドル彩色数という不変量が上記の不変量の精密化として導入された．さらに, 1990 年代に Carter, Jelsovsky, Kamada, Langford, Saito [1, 2] によってカンドルのコサイクルを用いてカンドル彩色数の精密化であるカンドルコサイクル不変量が定義された．

一方, 2011 年に Iwakiri, Satoh [5] は 2 つの 1 次元結び目から 2 次元結び目を得る次のような構成法を与えている．2 つの枠付き有向結び目 K, K' に対して, $\mathbb{R}^3$ へ標準的に埋め込まれた球面 S^2 上に描かれた K' の図式の管状近傍を (K のタングル図式) $\times S^1$ に置き換えて, K' の図式の交点の近傍を図 1 のモーションピクチャが表す図式に置き換えることによって構成される 2 次元結び目を岩切–佐藤の 2 次元結び目 (Iwakiri–Satoh 2-knot) という．

本稿では, Iwakiri–Satoh 2-knot の構成法において K' を n 成分の枠付き有向絡み目 L, K を n 個の枠付き有向結び目の組 $\{K_i\}(1 \leq i \leq n)$ に置き換える操作によって得られる一般化を行った一般化 Iwakiri–Satoh 2-knot$F(\{K_i\}, L)$ を導入した．この一般化 Iwakiri–Satoh 2-knot について 4 面体カンドル Q_4 に対するコサイクル不変量の値が $\{K_i\}$ のコサイクル不変量や L の成分の絡み数などを用いて表されることを示した (定理 2.2).

* E-mail:uedayd@kurims.kyoto-u.ac.jp

1.1 Iwakiri–Satoh 2-knot

K, K' を枠付き有向結び目とし, その枠 (framing) を $f_K, f_{K'}$ で表す. D を K から 1 点の近傍を取り除いた $[0,1]^2$ 上の black board framing が f_K となる 1-タングル図式, D' を K' の二次元球面 S^2 上の black board framing が $f_{K'}$ となる図式とする. $\mathbb{R}^3$ に標準的に埋め込まれた S^2 に D' が描かれているとする. D' の管状近傍を $D \times S^1$ に置き換え, D' の交点の近傍を図 1 のように置き換える. この部分の図式は D の 2 つの連結和について片方の D をもう一方の D の中を通すようなモーションピクチャによって表されるものである. このようにしてできる 2-knot の図式で 2-knot $F(K, K')$ を定め, これを **Iwakiri–Satoh 2-knot** と呼ぶことにする. この Iwakiri–Satoh 2-knot は Iwakiri, Satoh [5] によって定義された.

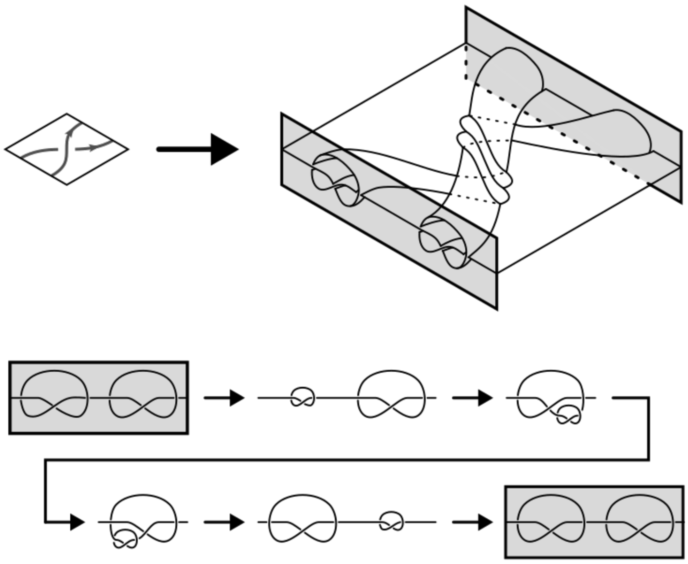

図 1 $F(K, K')$ の交点における変形

この構成法において K' を n 成分の枠付き有向絡み目 L, K を n 個の枠付き有向結び目の組 $\{K_i\}(1 \leq i \leq n)$ に置き換え, L の第 i 成分 L_i に対して L_i の管状近傍を $K_i \times S^1$ に置き換える操作をして得られる 2-knot の図式で 2-knot $F(\{K_i\}, L)$ を定め, これを**一般化 Iwakiri–Satoh 2-knot** と呼ぶことにする.

Iwakiri–Satoh 2-knot に対して以下のことが知られている.

注 1.1. Iwakiri–Satoh 2-knot は deform-spun knot である [5] .

注 1.2. roll-spun knot は Iwakiri–Satoh 2-knot である [5] .

これらと同様にして以下のことがわかる.

補題 1.3. 一般化 Iwakiri–Satoh 2-knot は deform-spun knot である.

補題 1.4. twist-roll-spun knot は一般化 Iwakiri–Satoh 2-knot である .

1.2　カンドル・カンドルコサイクル不変量

集合 X とその二項演算 $*: X \times X \to X$ が以下の 3 条件を満たすとき組 $(X, *)$ を**カンドル**と呼ぶ.

- 任意の $x \in X$ に対して, $x * x = x$ である.
- 任意の $y \in X$ に対して, 写像 $S_y : X \to X$, $S_y(x) = x * y$ は全単射である.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ である.

正 4 面体の頂点の集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ に対し, S_x を x を中心に 120 度回転させる写像と定めるとカンドルとなる. このカンドルを **4 面体カンドル**と言い, Q_4 で表す.

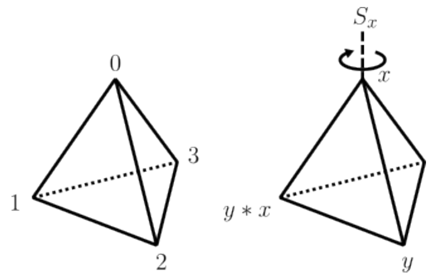

図 2　4 面体カンドル Q_4 の定義

D_K を結び目 K の図式, X をカンドルとする. 写像 $C : \{D_K\text{の弧}\} \to X$ が D_K の X **彩色**であるとは, 任意の交点で図 3 の左図の状況を満たすことである. D_K の X 彩色全体を $\mathrm{Col}_X(D_K)$ と表す. $\mathrm{Col}_X(D_K)$ の位数は, D_K の取り方によらずに定まることが知られており, これを K の X **彩色数**といい, $\#\mathrm{Col}_X(K)$ で表す.

同様に D_F を結び目 F の図式とする. 写像 $C : \{D_F\text{のシート}\} \to X$ が図 3 の中図の状況を満たすとき X **彩色**という. $\mathrm{Col}_X(D_F)$ と $\#\mathrm{Col}_X(F)$ も同様に定義される.

また, D_K を結び目 K の図式とする. 写像 $C : \{D_K\text{の弧}\} \sqcup \{\mathbb{R}^2 - D_K\text{の連結な領域}\} \to X$ が**シャドー X 彩色**であるとは, C の定義域を $\{D_K\text{の弧}\}$ に制限した写像が X 彩色であり, $\mathbb{R}^2 - D_K$ の領域に対して図 3 の右図の状況を満たすことを言う. シャドー X 彩色は X 彩色と $\mathbb{R}^2 - D_K$ の非有界領域へ与える元を定めると唯 1 つに決定されることが知られている.

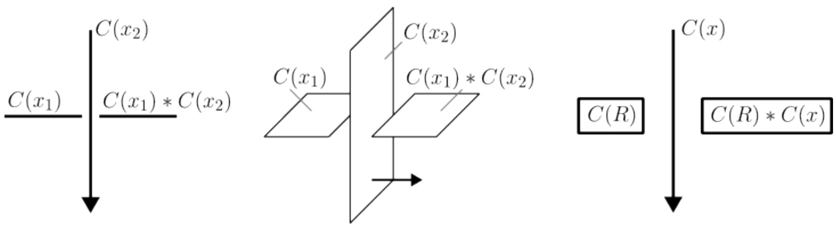

図 3　彩色条件

X をカンドル, A をアーベル群とする (演算は和でかく). 写像 $\psi : X^2 \to A$ が **2-コサイクル**であるとは, 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $\psi(x, x) = 0$, $\psi(x, y) + \psi(x * y, z) = \psi(x, z) + \psi(x * z, y * z)$ を満たすことである. また, 写像 $\phi : X^3 \to A$ が **3-コサイクル**であるとは, 任意の $x, y, z, w \in X$ に

対して, $\phi(x,x,y)=\phi(x,y,y)=0$, $\phi(x,y,w)+\phi(x*y,z,w)+\phi(x*w,y*w,z*w)=\phi(x,z,w)+\phi(x*z,y*z,w)+\phi(x,y,z)$ を満たすことである.

Q_4 を四面体カンドルとする. ψ_1 を $H^2_Q(Q_4;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の非自明なコホモロジーを与える 2-コサイクルとする (arXiv 上の [2] の第 2 版). また, $H^3(Q_4;\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ に対する普遍係数定理は以下のようになる.

$$\mathrm{Ext}(H_2(Q_4;\mathbb{Z});\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\longrightarrow H^3(Q_4;\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\longrightarrow \mathrm{Hom}(H_3(Q_4;\mathbb{Z});\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$$

$\mathrm{Ext}(H_2(Q_4;\mathbb{Z});\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の生成元を与える元の $H^3(Q_4;\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ における像を ϕ_3 とおく. $\mathrm{Hom}(H_3(Q_4;\mathbb{Z});\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ なので位数 4 の元の $H^3(Q_4;\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ における逆像を ϕ_1 とおく. また, 位数 2 の元で, 「別の元の 2 倍」にならない元を取り, その $H^3(Q_4;\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ における逆像を ϕ_2 とおく.

例として, $\phi_1:Q_4^3\to\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ を 1 つ固定して具体的に記述すると次のようになる.

$$\begin{aligned}&\Big((\phi_1(0,i,j))_{i,j=0,1,2,3},(\phi_1(1,i,j))_{i,j=0,1,2,3},(\phi_1(2,i,j))_{i,j=0,1,2,3},(\phi_1(3,i,j))_{i,j=0,1,2,3}\Big)\\ =&\left(\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&\cdot&0&0\\1&0&\cdot&0\\1&1&1&\cdot\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cdot&0&0&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\1&0&\cdot&0\\1&1&1&\cdot\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cdot&1&0&0\\0&\cdot&0&-1\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\1&1&2&\cdot\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cdot&-1&1&1\\0&\cdot&-1&0\\-1&1&\cdot&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

本稿では他のコサイクル $\psi_1:Q_4^2\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\phi_2:Q_4^3\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\phi_3:Q_4^3\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ も同様に具体的に 1 つ固定しておくことにする.

X を有限カンドル, A をアーベル群とし, 演算を積で書く. 結び目 K の図式を D_K, D_K の X 彩色を C, X の 2-cocycle を ψ とする. D_K の交点に対して図 4 のようにウェイト $W_\psi(\mathrm{x},C)$ を与える.

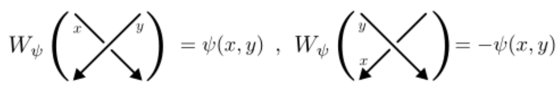

図 4　1 次元結び目のカンドルコサイクル不変量のウェイトの定義

このとき, $\Psi_\psi(D_K;C):=\prod_{\mathrm{x}:D_K\text{の交点}}W_\psi(\mathrm{x},C)$ とおく. さらに, $\Psi_\psi(K):=\sum_{C\in\mathrm{Col}_X(K)}\Psi_\psi(D_K;C)$ とおくとこれは結び目の不変量であることが知られており, これを結び目 K の**カンドルコサイクル不変量**と呼ぶ [1, 2].

同様に, 2 次元結び目 F の図式を D_F, D_F の X 彩色を C, X の 3-cocycle を ϕ とする. D_F の 3 重点に対して図 5 のようにウェイト $W_\phi(t,C)$ を与える.

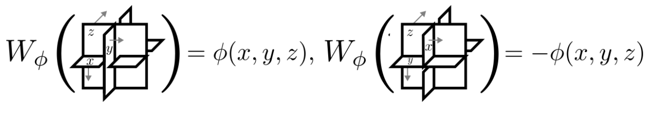

図 5　2 次元結び目のカンドルコサイクル不変量のウェイトの定義

このとき, $\Phi_\phi(D_F;C):=\prod_{t:D_F\text{の 3 重点}}W_\phi(t,C)$ とおく. さらに, $\Phi_\phi(F):=\sum_{C\in\mathrm{Col}_X(F)}\Phi_\phi(D_F;C)$

とおくと, これは 2 次元結び目の不変量であることが知られておりこれを 2 次元結び目 F の**カンドルコサイクル不変量**と呼ぶ [1, 2].

結び目 K の図式を D_K, D_K のシャドー X 彩色を C, C によって $\mathbb{R}^2 - D_K$ の非有界領域へ与えられる元を x_0, X の 3-cocycle を ϕ とする. D_K の交点に対して図 6 のようにウェイト $W_\phi(\mathrm{x}^*, C)$ を与える.

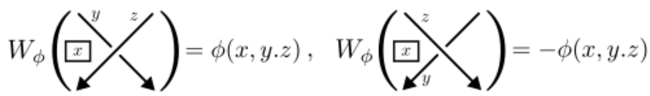

図 6　シャドーコサイクル不変量のウェイトの定義

このとき, $\Psi_\phi^{x_0}(D_K; C) := \prod_{\mathrm{x}^*: D_K \text{の交点}} W_\phi(\mathrm{x}^*, C)$ とおく. さらに,$\Psi_\phi^{x_0}(K) := \sum_{C \in \mathrm{Col}_X(K)} \Psi_\phi^{x_0}(D_K; C)$ とおくとこれは結び目の不変量であることが知られておりこれを結び目 K の**シャドーコサイクル不変量**と呼ぶ [4]. また, X が Q_4 の場合, $\Psi_\phi^{x_0}(D_K; C)$ が非有界領域へ与えられる元によらないことが知られているため, $\Psi_\phi^*(D_K; C) := \Psi_\phi^{x_0}(D_K; C)$, $\Psi_\phi^*(K) := \Psi_\phi^{x_0}(K)$ と書くことにする.

2　主結果

一般化 Iwakiri–Satoh 2-knot $F = F(\{K_i\}, L)$ の Q_4 に対する彩色とカンドルコサイクル不変量についての結果を示す. 彩色については以下のとおりである.

命題 2.1. K_i, L_i に対し, その枠を f_{K_i}, f_{L_i}, $lk(L_i, L_j)$ で L_i と L_j の絡み数 ($i = j$ のとき $lk(L_i, L_i) = f_{L_i}$) とする. F の Q_4 彩色について以下が成り立つ.

1. $\mathrm{Col}_{Q_4}(F)$ と $\bigsqcup_{a \in Q_4} \prod_{1 \le i \le n} \mathrm{Col}_{Q_4}(D_{K_i}, a)^{r_i}$ は 1 対 1 に対応する.

2. $\#\mathrm{Col}_{Q_4}(F) = 4 \times \prod_{1 \le i \le n} \{\#\mathrm{Col}_{Q_4}(K_i)/4\}^{r_i}$

ただし, $\mathrm{Col}_{Q_4}(D_K, a)$ で K のタングル図式 D_K の端点を $a \in Q_4$ とした彩色の集合, r_i は $\sum_j f_{K_j} \times lk(L_i, L_j)$ が 3 の倍数のとき 1, 3 の倍数でないとき 0 を返す関数である.

次に $F = F(\{K_i\}, L)$ の Q_4 に対するカンドルコサイクル不変量についての結果は以下のとおりである.

定理 2.2.　1. 任意の $C \in \mathrm{Col}_{Q_4}(F)$ について

$$\Phi_\phi(F(\{K_i\}, L), C) =$$
$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j} lk(L_i, L_j) \cdot \{f_{K_j} \cdot \Psi_{\phi_1}^*(K_i, C_i) + \iota_2(\Psi_{\psi_1}(K_i, C_i)\Psi_{\psi_1}(K_j, C_j))\} & \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \text{ (if } \phi = \phi_1) \\ \displaystyle\sum_{i,j} lk(L_i, L_j) \cdot f_{K_j} \cdot \{\Psi_{\phi_2}^*(K_i, C_i) + \Psi_{\psi_1}(K_i, C_i)\} & \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ (if } \phi = \phi_2) \\ 0 & \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ (if } \phi = \phi_3) \end{cases}$$

2. $\Phi_\phi(F(\{K_i\},L)) = \sum_{C\in \mathrm{Col}_{Q_4}(F)} \Phi_\phi(F(\{K_i\},L),C)$

ただし, $C \in \mathrm{Col}_{Q_4}(K_i)$ に対し, $\Psi_\psi(K_i,C_i)$ で C_i で彩色された K のカンドルコサイクル不変量を表し, $\Psi^*_\phi(K_i,C_i)$ で C_i で彩色された K のシャドーコサイクル不変量を表す. また, $\iota_2\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ を 2 倍写像とする. また, Q_4 の 2-コサイクル ψ_1, Q_4 の 3-コサイクル ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3 は導入で固定したものとする.

このことから, 今回の主定理の系として任意の twist-roll-spun knot の 4 面体カンドルに対するコサイクル不変量の具体的な表示を求めることができる. r-twist-s-roll-spun knot $\tau^r\rho^s K$ に対して, r が 3 の倍数でないとき $\Phi_\phi(\tau^r\rho^s K) = 4$ であり, r が 3 の倍数のときは以下のようになる.

系 2.3.

$$\Phi_\phi(\tau^r\rho^s K) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\mathrm{Col}_{Q_4}(K)} -\{r\cdot \Psi^*_{\phi_1}(K,C) + s\cdot \iota_2(\Psi_{\psi_1}(K,C))\} \\ \displaystyle\sum_{\mathrm{Col}_{Q_4}(K)} -r\cdot \{\Psi^*_{\phi_2}(K,C) + \Psi_{\psi_1}(K,C)\} \end{cases}$$

参考文献

[1] J.S.Carter, D.Jelsovsky, S.Kamada, L.Langford, M.Saito, *State-sum invariants of knotted curves and surfaces from quandle cohomology*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. **5** (1999) 146–156.

[2] J.S.Carter, D.Jelsovsky, S.Kamada, L.Langford, M.Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 3947–3989.

[3] J.S.Carter, D.Jelsovsky, S.Kamada, M.Saito, *Quandle homology groups, their Betti numbers, and virtual knots*, J.Pure Appl.Algebla **157** (2001) 135-155.

[4] J.S.Carter, S.Kamada, M.Saito, *Geometric interpretations of quandle homology and cocycle knot invariants*, J.Knot Theory Ramifications **10** (2001) 345–358.

[5] M.Iwakiri, S.Satoh, *Quandle cocycle invariants of roll-spun knots*, RIMS kokyuroku **1766** (2011) 30-37.

[6] H.Takeda, *The cocycle invariant of twist spun knots for the tetrahedral quandle*, Master thesis, Kyoto University, (2008).